高二数学试题参考答案(理科)

1. B　因为 $b^2=8$，所以虚轴长 $2b=4\sqrt{2}$.

2. A　若 $d>1$，则 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_{n+1}-a_n=d>1>0$，所以，$\{a_n\}$是递增数列；若$\{a_n\}$是递增数列，则 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_{n+1}-a_n=d>0$，推不出 $d>1$.

3. D　由于 $800\div 20=40$，即分段的间隔 $k=40$.

4. B　因为直线 PQ 过椭圆的右焦点 F_2，由椭圆的定义，在$\triangle F_1PQ$中，$|F_1P|+|F_1Q|+|PQ|=4a=16$. 又 $|F_1P|+|F_1Q|=10$，所以 $|PQ|=6$.

5. A　设这 100 个成绩的平均数记为 $\overline{x}$，则 $\overline{x}=\dfrac{1\times 20+2\times 10+3\times 40+4\times 10+5\times 20}{100}=3$.

6. B　男员工应抽取的人数为 $\dfrac{120-72}{120}\times 15=6$.

7. C　设焦距为 $2c$，则有 $\begin{cases}25-b^2=c^2\\5+c=2b\end{cases}$，解得 $b^2=16$，所以椭圆 C：$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

8. D　因为 $x_0+\dfrac{p}{2}=\dfrac{3p}{2}$，所以 $x_0=p$，$y_0=\sqrt{2}p$.

又 $p^2+(\sqrt{2}p)^2=12$，所以 $p=2$，准线方程为 $x=-1$.

9. D　$P=1-(0.015+0.025)\times 10=0.6$，由 $0.6m=33$，得 $m=55$.

10. A　设 $P(x,y)$，则由 $|PM|=2|PN|$ 得 $(x+3)^2+y^2=4[(x-2)^2+y^2]$，化简得 $3x^2+3y^2-22x+7=0$，即 $(x-\dfrac{11}{3})^2+y^2=\dfrac{100}{9}$，所以所求图形的面积 $S=\dfrac{100\pi}{9}$.

11. B　对于命题 p，将直线 l 平移到与椭圆相切，设这条平行线的方程为 $x+2y+m=0$，联立方程组 $\begin{cases}x^2+4y^2=1\\x+2y+m=0\end{cases}$，消去 y 得 $2x^2+2mx+m^2-1=0$.

由 $\Delta=0$ 得 $m=\pm\sqrt{2}$，所以，椭圆上的点到直线 l 最近距离为直线 $x+2y-\sqrt{2}=0$ 与 l 的距离 $d=\dfrac{|-\sqrt{2}+6\sqrt{2}|}{\sqrt{1+2^2}}=\sqrt{10}>1$，所以命题 p 为假命题，于是 $\neg p$ 为真命题，

对于命题 q，椭圆 $2x^2+27y^2=54$ 与双曲线 $9x^2-16y^2=144$ 有相同的焦点$(\pm 5,0)$，故 q 为真命题.

从而$(\neg p)\wedge q$ 为真命题.

12. C　由已知 $|BF_2|-|BF_1|=2a$，$|AF_1|-|AF_2|=2a$，又$\triangle ABF_2$ 为等边三角形，所以 $|AF_1|-|AF_2|=|BF_1|=2a$，所以 $|BF_2|=4a$. 在$\triangle AF_1F_2$ 中，$|AF_1|=6a$，$|AF_2|=4a$，$|F_1F_2|=2c$，$\angle F_1AF_2=60°$，由余弦定理得 $4c^2=36a^2+16a^2-2\times 6a\times 4a\times\cos 60°$，所以 $c^2=7a^2$，$b^2=c^2-a^2=6a^2$，所以双曲线方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{6a^2}=1$，又 $A(1,\sqrt{3})$在双曲线上，所以 $\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{3}{6a^2}=1$，解得 $a^2=\dfrac{1}{2}$，即 $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

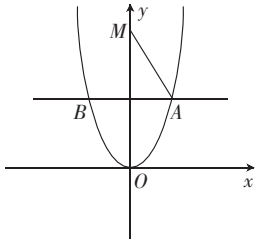
所以 $S_{\triangle BF_1F_2}=\dfrac{1}{2}\times 2a\times 4a\times\sin 120°=2\sqrt{3}a^2=\sqrt{3}$.

13. 9　因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，所以 $m+n=6$，又 $m+n\geqslant 2\sqrt{mn}$，所以 $mn\leqslant 9$.

14. 7　第一次循环，$S=0$，$n=2$；第二次循环，$S=1$，$n=4$；第三次循环，$S=3$，$n=6$；第四次循环，$S=5$，$n=8$；第五次循环，$S=7$，因为 $8>6$，所以输出 S 的值为 7.

15. $\dfrac{6}{11}$　当 $x\in[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{2\pi}{3}]$时，$2x-\dfrac{\pi}{6}\in[-\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{7\pi}{6}]$，当 $2x-\dfrac{\pi}{6}\in[0,\pi]$，即 $x\in[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{7\pi}{12}]$时 $f(x)\geqslant 0$，则所求概率为 $\dfrac{\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{12}}{\frac{2\pi}{3}-(-\frac{\pi}{4})}=\dfrac{6}{11}$.

16. $\frac{5}{6}$　如图，因为$|MA|=|OA|$，所以，点A在线段OM的中垂线上，



又$M(0,10)$，所以可设$A(x,5)$.

由$\tan 30°=\frac{x}{5}$，得$x=\frac{5}{\sqrt{3}}$，

所以$A(\frac{5}{\sqrt{3}},5)$的坐标代入方程$x^2=2py$，得$p=\frac{5}{6}$.

17. 解：(1)由$\begin{cases}x=3+t,\\ y=\sqrt{3}t\end{cases}$消去参数$t$，得直线$l$的普通方程为$\sqrt{3}x-y-3\sqrt{3}=0$，　…… 2分

由$\rho=2\sqrt{3}\sin\theta$得$\rho^2=2\sqrt{3}\rho\sin\theta$，$x^2+y^2=2\sqrt{3}y$，即圆$C$的直角坐标方程为$x^2+(y-\sqrt{3})^2=3$.　…… 5分

(2)$P(3+t,\sqrt{3}t)$，$C(0,\sqrt{3})$，$|PC|=\sqrt{(3+t)^2+(\sqrt{3}t-\sqrt{3})^2}=\sqrt{4t^2+12}$，

$\therefore t=0$时$|PC|$最小，此时$P(3,0)$. …… 10分

18. 解：(1)由已知方程$\frac{x^2}{m+3}-\frac{y^2}{2m-1}=1$表示焦点在$y$轴上的双曲线，

所以$\begin{cases}m+3<0\\ 1-2m>0\end{cases}$，解得$m<-3$. 即$q$：$m<-3$. …… 5分

(2)若方程$x^2+2mx+(m+2)=0$有两个不等的正根，

则$\begin{cases}\Delta=4m^2-4(m+2)>0\\ -2m>0\\ m+2>0\end{cases}$　解得$-2<m<-1$，即p：$-2<m<-1$. …… 7分

因p或q为真，所以p、q至少有一个为真.

又p且q为假，所以p、q至少有一个为假.

因此，p、q两命题应一真一假，当p为真，q为假时，$\begin{cases}-2<m<-1\\ m\geqslant -3\end{cases}$，解得$-2<m<-1$；　…… 9分

当p为假，q为真时，$\begin{cases}m\leqslant -2\text{ 或 }m\geqslant -1\\ m<-3\end{cases}$，解得$m<-3$.　…… 11分

综上，$-2<m<-1$或$m<-3$. …… 12分

19. 解：(1)因为$\bar{x}=7$，$\bar{y}=\frac{10+8+9+6+1}{5}=6.8$，

所以，$\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}=\frac{218-5\times7\times6.8}{255-5\times49}=-2$，

$\hat{a}=\bar{y}-b\bar{x}=6.8-(-2)\times7=20.8$，

于是得到y关于x的回归直线方程$\hat{y}=-2x+20.8$.　…… 6分

(2)销售价为x时的利润为$w=(x-4)(-2x+20.8)=-2x^2+28.8x-83.2$

当$x=\frac{28.8}{2\times2}\approx7$时，日利润最大. …… 12分

20. (1)解:依题意得:$\frac{x+8\times2+9+10}{5}=\frac{7+8+9+11\times2}{5}-1$,解得 $x=6$,$\overline{x}_{乙}=\frac{41}{5}$, …… 3 分

$s^2=\frac{1}{5}[(\frac{41}{5}-6)^2+(\frac{41}{5}-8)^2\times2+(\frac{41}{5}-9)^2+(10-\frac{41}{5})^2]=1.76$. …… 6 分

(2)记甲组投篮命中次数低于 10 次的同学为 A_1, A_2, A_3 他们的命中次数分别为 9,8,7.

乙组投篮命中次数低于 10 次的同学为 B_1, B_2, B_3, B_4,他们的命中次数分别为 6,8,8,9.

依题意,不同的选取方法有:

(A_1,B_1), (A_1,B_2), (A_1,B_3), (A_1,B_4), (A_2,B_1), (A_2,B_2), (A_2,B_3), (A_2,B_4), (A_3,B_1), (A_3,B_2), (A_3,B_3), (A_3,B_4)共 12 种. …… 9 分

设"这两名同学的投篮命中次数之和为 16"为事件 C,则 C 中恰含有(A_2,B_2), (A_2,B_3), (A_3,B_4)共 3 种.

$\therefore P(C)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$. …… 12 分

21. (1)证明:取 AB 的中点 E,连接 ED、EQ,则$\frac{AE}{EP}=2=\frac{AQ}{QC}$,所以 $EQ//PC$.

又 $EQ\not\subset$平面 CPM,所以 $EQ//$平面 CPM. …… 2 分

又 PM 是$\triangle BDE$ 的中位线,所以 $DE//PM$,

从而 $DE//$平面 CPM. …… 4 分

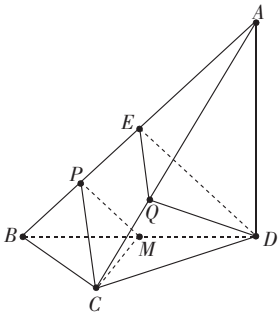
又 $DE\cap EQ=E$,所以平面 $DEQ//$平面 CPM, …… 5 分

因为 $DQ\subset$平面 DEQ,所以 $DQ//$平面 CPM. …… 6 分

(2)解:法 1:由 $AD\perp$平面 BCD 知,$AD\perp CM$

由 $BC=CD$,$BM=MD$ 知 $BD\perp CM$,

故 $CM\perp$平面 ABD. …… 7 分



由(1)知 $DE//PM$,而 $DE\perp AB$,故 $PM\perp AB$.

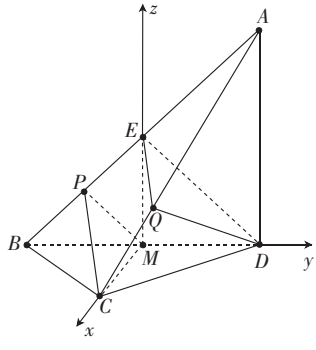
所以$\angle CPM$ 是二面角 $C-AB-D$ 的平面角,

即$\angle CPM=\frac{\pi}{3}$. …… 9 分

设 $PM=a$,则 $CM=\sqrt{3}a$,又易知在 $Rt\triangle ABD$ 中,$\angle B=\frac{\pi}{4}$,可知 $DM=BM=\sqrt{2}a$,

在 Rt$\triangle CMD$ 中,$\tan\angle MDC=\frac{MC}{MD}=\frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{2}a}=\frac{\sqrt{6}}{2}$. …… 12 分

法 2:以 M 为坐标原点,MC,MD,ME 所在的直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴建立如图所示的空间直角坐标系.



设 $MC=a$,$MD=b$,则 $C(a,0,0)$,$B(0,-b,0)$,$A(0,b,2b)$, …… 7 分

则$\overrightarrow{BC}=(a,b,0)$,$\overrightarrow{BA}=(0,2b,2b)$,

设 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$是平面 ABC 的一个法向量,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BA}=0.\end{cases}$即$\begin{cases}ax+by=0,\\ 2by+2bz=0.\end{cases}$取 $\boldsymbol{n}_1=(b,-a,a)$, …… 9 分

不难得到平面 ABD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(1,0,0)$, …… 10 分

所以$|\cos<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>|=\frac{b}{\sqrt{b^2+2a^2}}=\frac{1}{2}$,所以$\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

在 Rt$\triangle CMD$ 中,$\tan\angle MDC=\frac{MC}{MD}=\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{6}}{2}$. …… 12 分

22. 解:(1)因为 $\tan\angle PF_2F_1=2$,所以 $\sin\angle PF_2F_1=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,$\cos\angle PF_2F_1=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

由题意得$\begin{cases}\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\cdot|PF_2|\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=4\\ |PF_1|^2=|PF_2|^2+(2\sqrt{5})^2-2\cdot|PF_2|\times(2\sqrt{5})\times\frac{\sqrt{5}}{5}\end{cases}$，解得$\begin{cases}|PF_1|=4\\ |PF_2|=2\end{cases}$.

从而 $2a=|PF_1|+|PF_2|=4+2=6\Rightarrow a=3$，结合 $2c=2\sqrt{5}$，得 $b^2=4$，

故椭圆的方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. …… 6 分

(2)由(1)得 $A_1(-3,0)$，$A_2(3,0)$，

设 $M(x_0,y_0)$，则直线 MA_1 的方程为 $y=\frac{y_0}{x_0+3}(x+3)$，

它与直线 $x=\frac{3\sqrt{5}}{2}$的交点 E 的坐标为$E(\frac{3\sqrt{5}}{2},\frac{y_0}{x_0+3}(\frac{3\sqrt{5}}{2}+3))$，

直线 MA_2 的方程为 $y=\frac{y_0}{x_0-3}(x-3)$，它与直线 $x=\frac{3\sqrt{5}}{2}$的交点 E 的坐标为$F(\frac{3\sqrt{5}}{2},\frac{y_0}{x_0-3}(\frac{3\sqrt{5}}{2}-3))$，

再设以 EF 为直径的圆交 x 轴于点 $Q(m,0)$，则 $QE\perp QF$，从而 $k_{QE}\cdot k_{QF}=-1$，即$\frac{\frac{y_0}{x_0+3}(\frac{3\sqrt{5}}{2}+3)}{\frac{3\sqrt{5}}{2}-m}\cdot\frac{\frac{y_0}{x_0-3}(\frac{3\sqrt{5}}{2}-3)}{\frac{3\sqrt{5}}{2}-m}=-1$，即$\frac{\frac{9}{4}y_0^2}{x_0^2-9}=(\frac{3\sqrt{5}}{2}-m)^2$，解得 $m=\frac{3\sqrt{5}}{2}\pm 1$.

故以 EF 为直径的圆交 x 轴于定点，该定点的坐标为$(\frac{3\sqrt{5}}{2}+1,0)$或$(\frac{3\sqrt{5}}{2}-1,0)$. …… 12 分