2011年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学

第Ⅰ卷

一．选择题：本大题共12小题，每小题5分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

（1）已知集合 $M=\{0,1,2,3,4\}$，$N=\{1,3,5\}$，$P=M\cap N$，则 P 的子集共有

（A）2个　　（B）4个　　（C）6个　　（D）8个

（2）复数 $\dfrac{5\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}=$

（A）$2-\mathrm{i}$　　（B）$1-2\mathrm{i}$　　（C）$-2+\mathrm{i}$　　（D）$-1+2\mathrm{i}$

（3）下列函数中，既是偶函数又在 $(0,+\infty)$ 单调递增的函数是

（A）$y=x^3$　　（B）$y=|x|+1$　　（C）$y=-x^2+1$　　（D）$y=2^{-|x|}$

（4）椭圆 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{8}=1$ 的离心率为

（A）$\dfrac{1}{3}$　　（B）$\dfrac{1}{2}$　　（C）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　（D）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

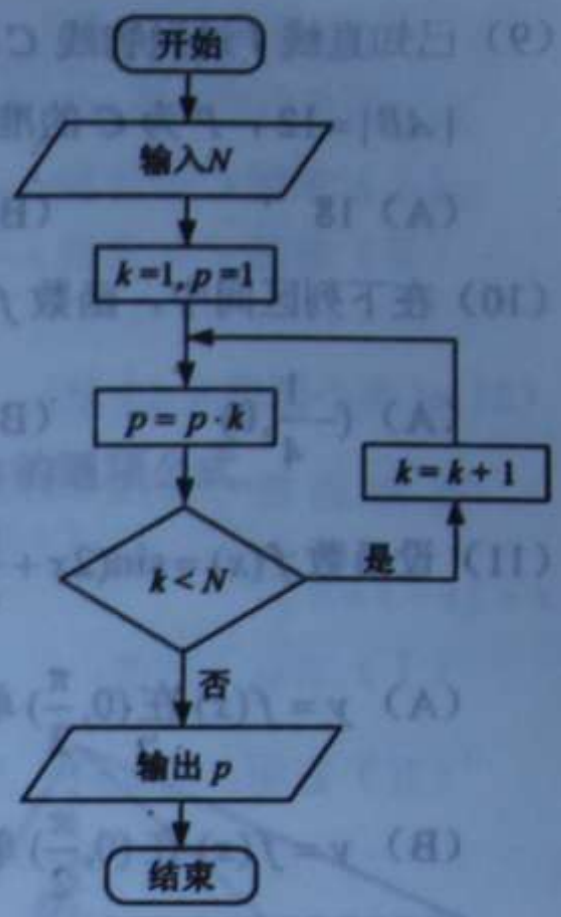
(5) 执行右面的程序框图，如果输入的 N 是 6，那么输出的 p 是

(A) 120

(B) 720

(C) 1 440

(D) 5 040



(6) 有 3 个兴趣小组，甲、乙两位同学各自参加其中一个小组，每位同学参加各个小组的可能性相同，则这两位同学参加同一个兴趣小组的概率为

(A) $\frac{1}{3}$　(B) $\frac{1}{2}$　(C) $\frac{2}{3}$　(D) $\frac{3}{4}$

(7) 已知角 θ 的顶点与原点重合，始边与 x 轴的正半轴重合，终边在直线 $y=2x$ 上，则 $\cos 2\theta =$

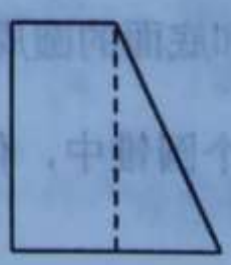
(A) $-\frac{4}{5}$　(B) $-\frac{3}{5}$　(C) $\frac{3}{5}$　(D) $\frac{4}{5}$

(8) 在一个几何体的三视图中，正视图和俯视图如右图所示，则相应的侧视图可以为


(正视图)


(俯视图)


(A)


(B)


(C)


(D)

(9) 已知直线 l 过抛物线 C 的焦点，且与 C 的对称轴垂直，l 与 C 交于 A, B 两点，$|AB|=12$，P 为 C 的准线上一点，则 $\triangle ABP$ 的面积为

(A) 18　　(B) 24　　(C) 36　　(D) 48

(10) 在下列区间中，函数 $f(x)=e^x+4x-3$ 的零点所在的区间为

(A) $(-\frac{1}{4},0)$　　(B) $(0,\frac{1}{4})$　　(C) $(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$　　(D) $(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$

(11) 设函数 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{4})+\cos(2x+\frac{\pi}{4})$，则

(A) $y=f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 单调递增，其图像关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称

(B) $y=f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 单调递增，其图像关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称

(C) $y=f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 单调递减，其图像关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称

(D) $y=f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 单调递减，其图像关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称

(12) 已知函数 $y=f(x)$ 的周期为 2，当 $x\in[-1,1]$ 时 $f(x)=x^2$，那么函数 $y=f(x)$ 的图像与函数 $y=|\lg x|$ 的图像的交点共有

(A) 10 个　　(B) 9 个　　(C) 8 个　　(D) 1 个

第 II 卷

本卷包括必考题和选考题两部分。第 13 题～第 21 题为必考题，每个试题考生都必须做答。第 22 题～第 24 题为选考题，考生根据要求做答。

二. 填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分。

(13) 已知 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为两个不共线的单位向量，k 为实数，若向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与向量 $k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 垂直，则 $k=$_____.

(14) 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}3\leqslant 2x+y\leqslant 9,\\ 6\leqslant x-y\leqslant 9,\end{cases}$ 则 $z=x+2y$ 的最小值为_____.

(15) $\triangle ABC$ 中，$B=120°$，$AC=7$，$AB=5$，则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.

(16) 已知两个圆锥有公共底面，且两圆锥的顶点和底面的圆周都在同一个球面上. 若圆锥底面面积是这个球面面积的 $\frac{3}{16}$，则这两个圆锥中，体积较小者的高与体积较大者的高的比值为_____.

三. 解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

（17）（本小题满分 12 分）

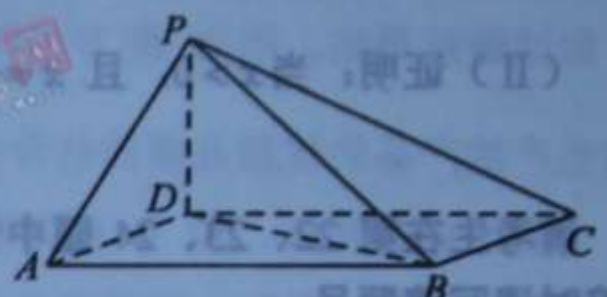
已知等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=\frac{1}{3}$，公比$q=\frac{1}{3}$.

（Ⅰ）S_n为$\{a_n\}$的前n项和，证明：$S_n=\frac{1-a_n}{2}$；

（Ⅱ）设$b_n=\log_3 a_1+\log_3 a_2+\cdots+\log_3 a_n$，求数列$\{b_n\}$的通项公式.

（18）（本小题满分 12 分）

如图，四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为平行四边形，$\angle DAB=60°$，$AB=2AD$，$PD\perp$底面$ABCD$.



（Ⅰ）证明：$PA\perp BD$；

（Ⅱ）设$PD=AD=1$，求棱锥$D-PBC$的高.

（19）（本小题满分 12 分）

某种产品的质量以其质量指标值衡量，质量指标值越大表明质量越好，且质量指标值大于或等于 102 的产品为优质品. 现用两种新配方（分别称为 A 配方和 B 配方）做试验，各生产了 100 件这种产品，并测量了每件产品的质量指标值，得到下面试验结果：

A 配方的频数分布表

指标值分组	[90，94)	[94，98)	[98，102)	[102，106)	[106，110]
频数	8	20	42	22	8

B 配方的频数分布表

指标值分组	[90，94)	[94，98)	[98，102)	[102，106)	[106，110]
频数	4	12	42	32	10

（Ⅰ）分别估计用 A 配方，B 配方生产的产品的优质品率；

（Ⅱ）已知用 B 配方生产的一件产品的利润y（单位：元）与其质量指标值t的关系式为

$$y=\begin{cases}-2, & t<94,\\ 2, & 94\leqslant t<102,\\ 4, & t\geqslant 102.\end{cases}$$

估计用 B 配方生产的一件产品的利润大于 0 的概率，并求用 B 配方生产的上述 100 件产品平均一件的利润.

高考资源网 www.ks5u.com

（20）（本小题满分 12 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 $y=x^2-6x+1$ 与坐标轴的交点都在圆 C 上.

（Ⅰ）求圆 C 的方程；

（Ⅱ）若圆 C 与直线 $x-y+a=0$ 交于 A，B 两点，且 $OA\perp OB$，求 a 的值.

（21）（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{a\ln x}{x+1}+\dfrac{b}{x}$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $x+2y-3=0$.

（Ⅰ）求 a, b 的值；

（Ⅱ）证明：当 $x>0$，且 $x\neq 1$ 时，$f(x)>\dfrac{\ln x}{x-1}$.

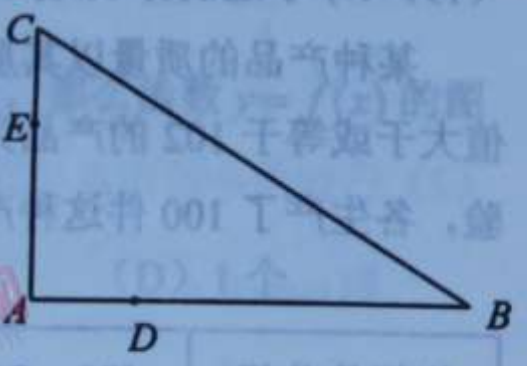
请考生在第 22、23、24 题中任选一题做答，如果多做，则按所做的第一题记分。做答时请写清题号。

（22）（本小题满分 10 分）选修 4—1：几何证明选讲

如图，D，E 分别为 $\triangle ABC$ 的边 AB，AC 上的点，且不与 $\triangle ABC$ 的顶点重合. 已知 AE 的长为 m，AC 的长为 n，AD，AB 的长是关于 x 的方程 $x^2-14x+mn=0$ 的两个根.

（Ⅰ）证明：C，B，D，E 四点共圆；

（Ⅱ）若 $\angle A=90°$，且 $m=4$，$n=6$，求 C，B，D，E 所在圆的半径.



（23）（本小题满分 10 分）选修 4—4：坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为

$$\begin{cases}x=2\cos\alpha,\\ y=2+2\sin\alpha.\end{cases}\quad(\alpha\text{为参数})$$

M 是 C_1 上的动点，P 点满足 $\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OM}$，$P$ 点的轨迹为曲线 C_2.

（Ⅰ）求 C_2 的方程；

（Ⅱ）在以 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴的极坐标系中，射线 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 与 C_1 的异于极点的交点为 A，与 C_2 的异于极点的交点为 B，求 $|AB|$.

（24）（本小题满分 10 分）选修 4—5：不等式选讲

设函数 $f(x)=|x-a|+3x$，其中 $a>0$.

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求不等式 $f(x)\geqslant 3x+2$ 的解集；

（Ⅱ）若不等式 $f(x)\leqslant 0$ 的解集为 $\{x|x\leqslant -1\}$，求 a 的值.

2011 年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学试题参考答案

一. 选择题

(1) B	(2) C	(3) B	(4) D	(5) B	(6) A
(7) B	(8) D	(9) C	(10) C	(11) D	(12) A

二. 填空题

(13) 1　　(14) −6　　(15) $\frac{15\sqrt{3}}{4}$　　(16) $\frac{1}{3}$

三. 解答题

(17) 解:

(Ⅰ) 因为 $a_n=\frac{1}{3}\times(\frac{1}{3})^{n-1}=\frac{1}{3^n}$,

$$S_n=\frac{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3^n})}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1-\frac{1}{3^n}}{2},$$

所以 $S_n=\frac{1-a_n}{2}$.

(Ⅱ) $b_n=\log_3 a_1+\log_3 a_2+\cdots+\log_3 a_n$

$=-(1+2+\cdots+n)$

$=-\frac{n(n+1)}{2}$.

所以 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=-\frac{n(n+1)}{2}$.

(18) 解:

(Ⅰ) 因为 $\angle DAB=60°$, $AB=2AD$, 由余弦定理得 $BD=\sqrt{3}AD$.

从而 $BD^2+AD^2=AB^2$, 故 $BD\perp AD$. 又 $PD\perp$ 底面 $ABCD$, 可得 $BD\perp PD$.

所以 $BD\perp$ 平面 PAD. 故 $PA\perp BD$.

(Ⅱ) 如图, 作 $DE\perp PB$, 垂足为 E. 已知 $PD\perp$ 底面 $ABCD$, 则 $PD\perp BC$.

由 (Ⅰ) 知 $BD\perp AD$, 又 $BC\parallel AD$, 所以 $BC\perp BD$.

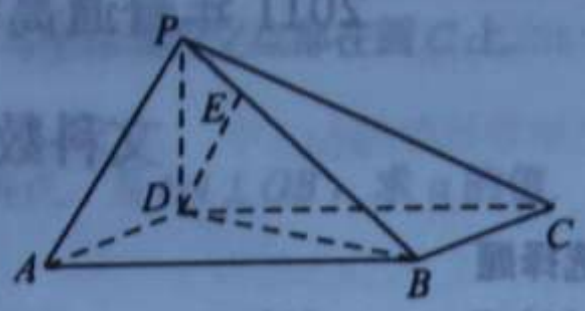
故 $BC\perp$ 平面 PBD, $BC\perp DE$.

则 $DE\perp$ 平面 PBC.

由题设知 $PD=1$，则 $BD=\sqrt{3}$，$PB=2$.

根据 $DE\cdot PB=PD\cdot BD$ 得 $DE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

即棱锥 $D-PBC$ 的高为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



（19）解：

（Ⅰ）由试验结果知，用 A 配方生产的产品中优质品的频率为 $\dfrac{22+8}{100}=0.3$，所以用 A 配方生产的产品的优质品率的估计值为 0.3.

由试验结果知，用 B 配方生产的产品中优质品的频率为 $\dfrac{32+10}{100}=0.42$，所以用 B 配方生产的产品的优质品率的估计值为 0.42.

（Ⅱ）由条件知，用 B 配方生产的一件产品的利润大于 0 当且仅当其质量指标值 $t\geqslant 94$，由试验结果知，质量指标值 $t\geqslant 94$ 的频率为 0.96. 所以用 B 配方生产的一件产品的利润大于 0 的概率估计值为 0.96.

用 B 配方生产的产品平均一件的利润为

$$\frac{1}{100}\times(4\times(-2)+54\times 2+42\times 4)=2.68\text{（元）}.$$

（20）解：

（Ⅰ）曲线 $y=x^2-6x+1$ 与 y 轴的交点为 $(0,1)$，与 x 轴的交点为 $(3+2\sqrt{2},0)$，$(3-2\sqrt{2},0)$.

故可设 C 的圆心为 $(3,t)$，则有 $3^2+(t-1)^2=(2\sqrt{2})^2+t^2$，解得 $t=1$.

则圆 C 的半径为 $\sqrt{3^2+(t-1)^2}=3$.

所以圆 C 的方程为 $(x-3)^2+(y-1)^2=9$.

（Ⅱ）设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，其坐标满足方程组：

$$\begin{cases}x-y+a=0,\\(x-3)^2+(y-1)^2=9.\end{cases}$$

高考资源网 www.ks5u.com

消去 y，得到方程

$$2x^2+(2a-8)x+a^2-2a+1=0.$$

由已知可得，判别式 $\Delta=56-16a-4a^2>0$.

因此 $x_{1,2}=\dfrac{(8-2a)\pm\sqrt{56-16a-4a^2}}{4}$，从而

$$x_1+x_2=4-a,\quad x_1x_2=\frac{a^2-2a+1}{2}. \qquad ①$$

由于 $OA\perp OB$，可得 $x_1x_2+y_1y_2=0$. 又 $y_1=x_1+a$，$y_2=x_2+a$，所以

$$2x_1x_2+a(x_1+x_2)+a^2=0. \qquad ②$$

由①，②得 $a=-1$，满足 $\Delta>0$，故 $a=-1$.

(21) 解：

（Ⅰ）$f'(x)=\dfrac{a(\frac{x+1}{x}-\ln x)}{(x+1)^2}-\dfrac{b}{x^2}$.

由于直线 $x+2y-3=0$ 的斜率为 $-\dfrac{1}{2}$，且过点 $(1,1)$，故 $\begin{cases}f(1)=1,\\ f'(1)=-\dfrac{1}{2},\end{cases}$ 即

$$\begin{cases}b=1,\\ \dfrac{a}{2}-b=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

解得 $a=1$，$b=1$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x+1}+\dfrac{1}{x}$，所以

$$f(x)-\frac{\ln x}{x-1}=\frac{1}{1-x^2}(2\ln x-\frac{x^2-1}{x}).$$

考虑函数 $h(x)=2\ln x-\dfrac{x^2-1}{x}$ $(x>0)$，则

$$h'(x)=\frac{2}{x}-\frac{2x^2-(x^2-1)}{x^2}=-\frac{(x-1)^2}{x^2}.$$

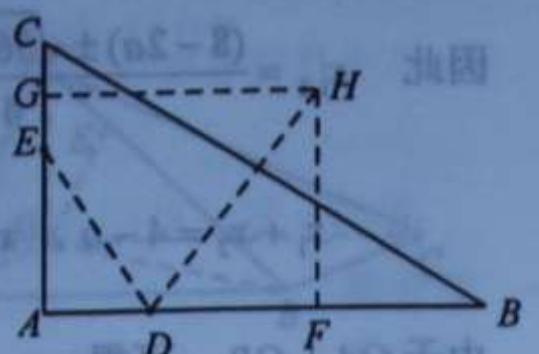
所以当 $x\neq1$ 时，$h'(x)<0$. 而 $h(1)=0$，故

当 $x\in(0,1)$ 时，$h(x)>0$，可得 $\dfrac{1}{1-x^2}h(x)>0$；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h(x)<0$，可得 $\dfrac{1}{1-x^2}h(x)>0$.

从而当 $x>0$，且 $x\neq1$ 时，$f(x)-\dfrac{\ln x}{x-1}>0$，即 $f(x)>\dfrac{\ln x}{x-1}$.

(22) 解：



（Ⅰ）连结 DE，根据题意在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle ACB$ 中，

$AD\times AB=mn=AE\times AC$，

即 $\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{AE}{AB}$. 又 $\angle DAE=\angle CAB$，从而 $\triangle ADE\backsim\triangle ACB$.

因此 $\angle ADE=\angle ACB$.

所以 C，B，D，E 四点共圆.

（Ⅱ）$m=4$，$n=6$ 时，方程 $x^2-14x+mn=0$ 的两根为 $x_1=2, x_2=12$.

故 $AD=2$，$AB=12$.

取 CE 的中点 G，DB 的中点 F，分别过 G，F 作 AC，AB 的垂线，两垂线相交于 H 点，连结 DH. 因为 C，B，D，E 四点共圆，所以 C，B，D，E 四点所在圆的圆心为 H，半径为 DH.

由于 $\angle A=90°$，故 $GH/\!/AB$，$HF/\!/AC$. 从而 $HF=AG=5$，$DF=\dfrac{1}{2}(12-2)=5$.

故 C，B，D，E 四点所在圆的半径为 $5\sqrt{2}$.

(23) 解：

（Ⅰ）设 $P(x,y)$，则由条件知 $M(\dfrac{x}{2},\dfrac{y}{2})$. 由于 M 点在 C_1 上，所以

$$\begin{cases}\dfrac{x}{2}=2\cos\alpha,\\ \dfrac{y}{2}=2+2\sin\alpha.\end{cases}\quad\text{即}\quad\begin{cases}x=4\cos\alpha,\\ y=4+4\sin\alpha.\end{cases}$$

从而 C_2 的参数方程为 $\begin{cases}x=4\cos\alpha,\\ y=4+4\sin\alpha.\end{cases}$ (α 为参数)

（Ⅱ）曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho=4\sin\theta$，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=8\sin\theta$.

射线 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 与 C_1 的交点 A 的极径为 $\rho_1=4\sin\dfrac{\pi}{3}$，

射线 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 与 C_2 的交点 B 的极径为 $\rho_2=8\sin\dfrac{\pi}{3}$.

所以 $|AB|=|\rho_2-\rho_1|=2\sqrt{3}$.

高考资源网 www.ks5u.com

(24) 解：

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，$f(x)\geqslant 3x+2$ 可化为 $|x-1|\geqslant 2$.

由此可得 $x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant -1$. 故不等式 $f(x)\geqslant 3x+2$ 的解集为

$\{x|x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant -1\}$.

（Ⅱ）由 $f(x)\leqslant 0$ 得 $|x-a|+3x\leqslant 0$.

此不等式化为不等式组 $\begin{cases}x\geqslant a,\\ x-a+3x\leqslant 0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\leqslant a,\\ a-x+3x\leqslant 0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}x\geqslant a,\\ x\leqslant \frac{a}{4},\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\leqslant a,\\ x\leqslant -\frac{a}{2}.\end{cases}$

因为 $a>0$，所以不等式组的解集为 $\{x|x\leqslant -\frac{a}{2}\}$.

由题设可得 $-\frac{a}{2}=-1$，故 $a=2$.

2011 年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学

第Ⅰ卷

一. 选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

（1）复数 $\frac{2+i}{1-2i}$ 的共轭复数是

（A）$-\frac{3}{5}i$　　（B）$\frac{3}{5}i$　　（C）$-i$　　（D）i

（2）下列函数中，既是偶函数又在 $(0,+\infty)$ 单调递增的函数是

（A）$y=x^3$　　（B）$y=|x|+1$　　（C）$y=-x^2+1$　　（D）$y=2^{-|x|}$

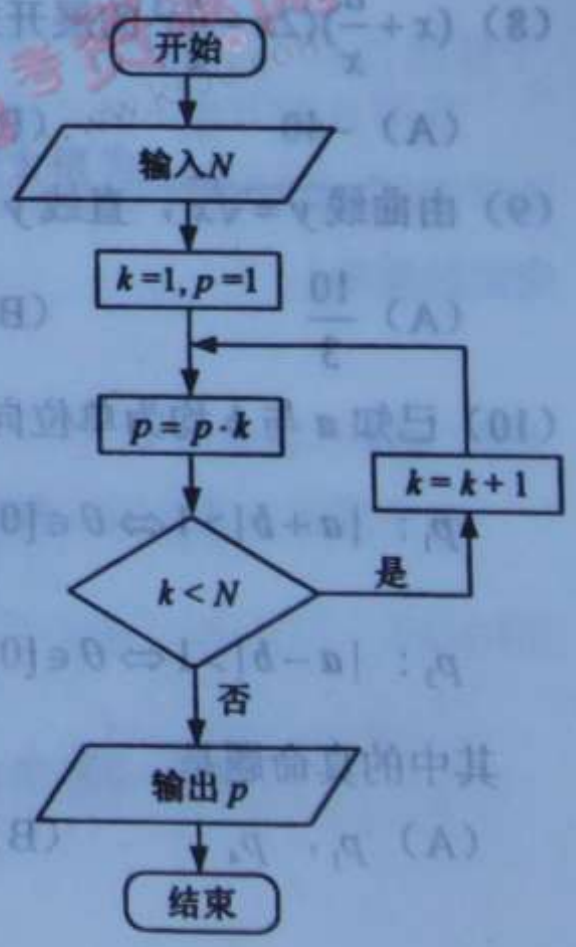
（3）执行右面的程序框图，如果输入的 N 是 6，那么输出的 p 是

（A）120

（B）720

（C）1 440

（D）5 040



高考资源网 www.ks5u.com

（4）有 3 个兴趣小组，甲、乙两位同学各自参加其中一个小组，每位同学参加各个小组的可能性相同，则这两位同学参加同一个兴趣小组的概率为

（A）$\frac{1}{3}$　　（B）$\frac{1}{2}$　　（C）$\frac{2}{3}$　　（D）$\frac{3}{4}$

（5）已知角 θ 的顶点与原点重合，始边与 x 轴的正半轴重合，终边在直线 $y=2x$ 上，则 $\cos 2\theta=$

（A）$-\frac{4}{5}$　　（B）$-\frac{3}{5}$　　（C）$\frac{3}{5}$　　（D）$\frac{4}{5}$

（6）在一个几何体的三视图中，正视图和俯视图如右图所示，则相应的侧视图可以为



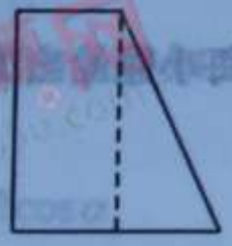
（正视图）



（俯视图）



（A）



（B）



（C）



（D）

（7）设直线 l 过双曲线 C 的一个焦点，且与 C 的一条对称轴垂直，l 与 C 交于 A，B 两点，$|AB|$ 为 C 的实轴长的 2 倍，则 C 的离心率为

（A）$\sqrt{2}$　　（B）$\sqrt{3}$　　（C）2　　（D）3

（8）$(x+\frac{a}{x})(2x-\frac{1}{x})^5$ 的展开式中各项系数的和为 2，则该展开式中常数项为

（A）-40　　（B）-20　　（C）20　　（D）40

（9）由曲线 $y=\sqrt{x}$，直线 $y=x-2$ 及 y 轴所围成的图形的面积为

（A）$\frac{10}{3}$　　（B）4　　（C）$\frac{16}{3}$　　（D）6

（10）已知 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 均为单位向量，其夹角为 θ，有下列四个命题

p_1：$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>1 \Leftrightarrow \theta\in[0,\frac{2\pi}{3})$　　p_2：$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>1 \Leftrightarrow \theta\in(\frac{2\pi}{3},\pi]$

p_3：$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|>1 \Leftrightarrow \theta\in[0,\frac{\pi}{3})$　　p_4：$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|>1 \Leftrightarrow \theta\in(\frac{\pi}{3},\pi]$

其中的真命题是

（A）p_1，p_4　　（B）p_1，p_3　　（C）p_2，p_3　　（D）p_2，p_4

高考资源网 www.ks5u.com

（11）设函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)+\cos(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的最小正周期为 π，且 $f(-x)=f(x)$，则

（A）$f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 单调递减　　（B）$f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$ 单调递减

（C）$f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 单调递增　　（D）$f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$ 单调递增

（12）函数 $y=\frac{1}{1-x}$ 的图像与函数 $y=2\sin\pi x$ $(-2\leqslant x\leqslant 4)$ 的图像所有交点的横坐标之和等于

（A）2　　（B）4　　（C）6　　（D）8

第II卷

本卷包括必考题和选考题两部分。第 13 题～第 21 题为必考题，每个试题考生都必须做答。第 22 题～第 24 题为选考题，考生根据要求做答。

二．填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分。

（13）若变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}3\leqslant 2x+y\leqslant 9,\\6\leqslant x-y\leqslant 9,\end{cases}$ 则 $z=x+2y$ 的最小值为_____.

（14）在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 C 的中心为原点，焦点 F_1，F_2 在 x 轴上，离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$．过 F_1 的直线 l 交 C 于 A，B 两点，且 $\triangle ABF_2$ 的周长为 16，那么 C 的方程为_____.

（15）已知矩形 $ABCD$ 的顶点都在半径为 4 的球 O 的球面上，且 $AB=6$，$BC=2\sqrt{3}$，则棱锥 $O-ABCD$ 的体积为_____.

（16）在 $\triangle ABC$ 中，$B=60°$，$AC=\sqrt{3}$，则 $AB+2BC$ 的最大值为_____.

三．解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

（17）（本小题满分 12 分）

等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，且 $2a_1+3a_2=1$，$a_3^2=9a_2a_6$．

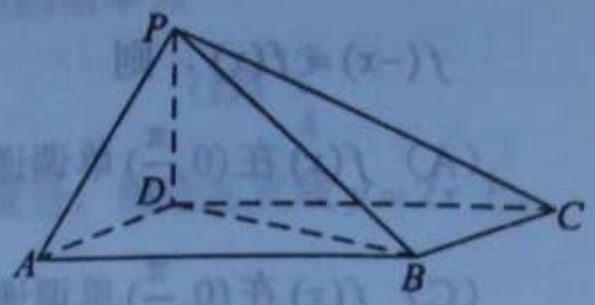
（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）设 $b_n=\log_3 a_1+\log_3 a_2+\cdots+\log_3 a_n$，求数列 $\{\frac{1}{b_n}\}$ 的前 n 项和.

高考资源网 www.ks5u.com

（18）（本小题满分 12 分）

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为平行四边形，$\angle DAB=60°$，$AB=2AD$，$PD\perp$ 底面 $ABCD$.



（Ⅰ）证明：$PA\perp BD$；

（Ⅱ）若 $PD=AD$，求二面角 $A-PB-C$ 的余弦值.

（19）（本小题满分 12 分）

某种产品的质量以其质量指标值衡量，质量指标值越大表明质量越好，且质量指标值大于或等于 102 的产品为优质品. 现用两种新配方（分别称为 A 配方和 B 配方）做试验，各生产了 100 件这种产品，并测量了每件产品的质量指标值，得到下面试验结果：

A 配方的频数分布表

指标值分组	[90，94)	[94，98)	[98，102)	[102，106)	[106，110]
频数	8	20	42	22	8

B 配方的频数分布表

指标值分组	[90，94)	[94，98)	[98，102)	[102，106)	[106，110]
频数	4	12	42	32	10

（Ⅰ）分别估计用 A 配方，B 配方生产的产品的优质品率；

（Ⅱ）已知用 B 配方生产的一件产品的利润 y（单位：元）与其质量指标值 t 的关系式为

$$y=\begin{cases}-2, & t<94,\\ 2, & 94\leqslant t<102,\\ 4, & t\geqslant 102.\end{cases}$$

从用 B 配方生产的产品中任取一件，其利润记为 X（单位：元），求 X 的分布列及数学期望.（以试验结果中质量指标值落入各组的频率作为一件产品的质量指标值落入相应组的概率）

（20）（本小题满分 12 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(0,-1)$，B 点在直线 $y=-3$ 上，M 点满足 $\overline{MB}/\!/\overline{OA}$，$\overline{MA}\cdot\overline{AB}=\overline{MB}\cdot\overline{BA}$，$M$ 点的轨迹为曲线 C.

（Ⅰ）求 C 的方程；

（Ⅱ）P 为 C 上的动点，l 为 C 在 P 点处的切线，求 O 点到 l 距离的最小值.

高考资源网 www.ks5u.com

（21）（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{a\ln x}{x+1}+\dfrac{b}{x}$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $x+2y-3=0$.

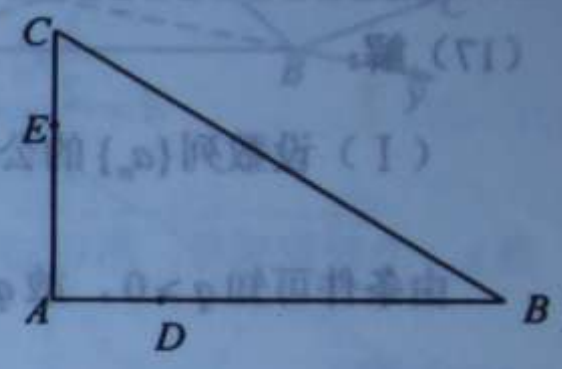
（Ⅰ）求 a, b 的值；

（Ⅱ）如果当 $x>0$，且 $x\neq 1$ 时，$f(x)>\dfrac{\ln x}{x-1}+\dfrac{k}{x}$，求 k 的取值范围.

请考生在第 22、23、24 题中任选一题做答，如果多做，则按所做的第一题记分。做答时请写清题号。

（22）（本小题满分 10 分）选修 4—1：几何证明选讲

如图，D，E 分别为 $\triangle ABC$ 的边 AB，AC 上的点，且不与 $\triangle ABC$ 的顶点重合. 已知 AE 的长为 m，AC 的长为 n，AD，AB 的长是关于 x 的方程 $x^2-14x+mn=0$ 的两个根.



（Ⅰ）证明：C，B，D，E 四点共圆；

（Ⅱ）若 $\angle A=90°$，且 $m=4$，$n=6$，求 C，B，D，E 所在圆的半径.

（23）（本小题满分 10 分）选修 4—4：坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为

$$\begin{cases}x=2\cos\alpha,\\ y=2+2\sin\alpha.\end{cases}\quad(\alpha\text{为参数})$$

M 是 C_1 上的动点，P 点满足 $\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OM}$，$P$ 点的轨迹为曲线 C_2.

（Ⅰ）求 C_2 的方程；

（Ⅱ）在以 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴的极坐标系中，射线 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 与 C_1 的异于极点的交点为 A，与 C_2 的异于极点的交点为 B，求 $|AB|$.

（24）（本小题满分 10 分）选修 4—5：不等式选讲

设函数 $f(x)=|x-a|+3x$，其中 $a>0$.

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求不等式 $f(x)\geqslant 3x+2$ 的解集；

（Ⅱ）若不等式 $f(x)\leqslant 0$ 的解集为 $\{x|x\leqslant -1\}$，求 a 的值.

高考资源网 www.ks5u.com

2011年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学试题参考答案

一. 选择题

(1) C	(2) B	(3) B	(4) A	(5) B	(6) D
(7) B	(8) D	(9) C	(10) A	(11) A	(12) D

二. 填空题

(13) -6　　(14) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$　　(15) $8\sqrt{3}$　　(16) $2\sqrt{7}$

三. 解答题

(17) 解：

(Ⅰ) 设数列$\{a_n\}$的公比为q. 由$a_3^2=9a_2a_6$得$a_3^2=9a_4^2$，所以$q^2=\frac{1}{9}$.

由条件可知$q>0$，故$q=\frac{1}{3}$.

由$2a_1+3a_2=1$得$2a_1+3a_1q=1$，所以$a_1=\frac{1}{3}$.

故数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{1}{3^n}$.

(Ⅱ) $b_n=\log_3 a_1+\log_3 a_2+\cdots+\log_3 a_n$

$$=-(1+2+\cdots+n)$$

$$=-\frac{n(n+1)}{2}.$$

故 $\frac{1}{b_n}=-\frac{2}{n(n+1)}=-2(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$，

$$\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_n}=-2((1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}))=-\frac{2n}{n+1}.$$

所以数列$\{\frac{1}{b_n}\}$的前n项和为$-\frac{2n}{n+1}$.

(18) 解：

(Ⅰ) 因为$\angle DAB=60°, AB=2AD$，由余弦定理得$BD=\sqrt{3}AD$.

从而$BD^2+AD^2=AB^2$，故$BD\perp AD$.

又$PD\perp$底面$ABCD$，可得 $BD\perp PD$.

所以$BD\perp$平面PAD. 故　$PA\perp BD$.

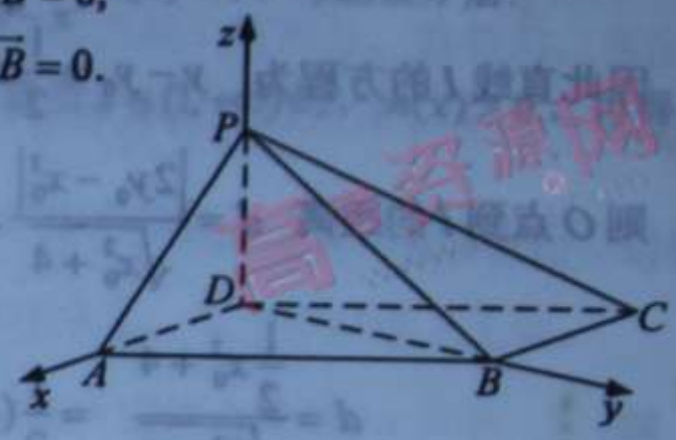
高考资源网 www.ks5u.com

（Ⅱ）如图，以 D 为坐标原点，AD 的长为单位长，射线 DA 为 x 轴的正半轴建立空间直角坐标系 $D-xyz$．则

$A(1,0,0)$，$B(0,\sqrt{3},0)$，$C(-1,\sqrt{3},0)$，$P(0,0,1)$，

$\overrightarrow{AB}=(-1,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{PB}=(0,\sqrt{3},-1)$，$\overrightarrow{BC}=(-1,0,0)$．

设平面 PAB 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0.\end{cases}$



即 $\begin{cases}-x+\sqrt{3}y=0,\\ \sqrt{3}y-z=0.\end{cases}$

因此可取 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},1,\sqrt{3})$．

设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{m}$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0.\end{cases}$

可取 $\boldsymbol{m}=(0,-1,-\sqrt{3})$．$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{-4}{2\sqrt{7}}=-\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$．

故二面角 $A-PB-C$ 的余弦值为 $-\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$．

（19）解：

（Ⅰ）由试验结果知，用 A 配方生产的产品中优质品的频率为 $\dfrac{22+8}{100}=0.3$，所以用 A 配方生产的产品的优质品率的估计值为 0.3.

由试验结果知，用 B 配方生产的产品中优质品的频率为 $\dfrac{32+10}{100}=0.42$，所以用 B 配方生产的产品的优质品率的估计值为 0.42.

（Ⅱ）用 B 配方生产的 100 件产品中，其质量指标值落入区间 [90，94)，[94，102)，[102，110] 的频率分别为 0.04，0.54，0.42，因此

$P(X=-2)=0.04$，$P(X=2)=0.54$，$P(X=4)=0.42$，

即 X 的分布列为

X	-2	2	4
P	0.04	0.54	0.42

X 的数学期望 $EX=-2\times0.04+2\times0.54+4\times0.42=2.68$．

高考资源网 www.ks5u.com

(20) 解:

(Ⅰ) 设 $M(x,y)$，由已知得 $B(x,-3)$，$A(0,-1)$.

所以 $\overrightarrow{MA}=(-x,-1-y)$，$\overrightarrow{MB}=(0,-3-y)$，$\overrightarrow{AB}=(x,-2)$.

再由题意可知 $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})\cdot\overrightarrow{AB}=0$，　即 $(-x,-4-2y)\cdot(x,-2)=0$.

所以曲线 C 的方程为 $y=\frac{1}{4}x^2-2$.

(Ⅱ) 设 $P(x_0,y_0)$ 为曲线 $C:y=\frac{1}{4}x^2-2$ 上一点，因为 $y'=\frac{1}{2}x$，所以 l 的斜率为 $\frac{1}{2}x_0$.

因此直线 l 的方程为 $y-y_0=\frac{1}{2}x_0(x-x_0)$，即 $x_0x-2y+2y_0-x_0^2=0$.

则 O 点到 l 的距离 $d=\frac{|2y_0-x_0^2|}{\sqrt{x_0^2+4}}$. 又 $y_0=\frac{1}{4}x_0^2-2$，所以

$$d=\frac{\frac{1}{2}x_0^2+4}{\sqrt{x_0^2+4}}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x_0^2+4}+\frac{4}{\sqrt{x_0^2+4}}\right)\geqslant 2,$$

当 $x_0=0$ 时取等号，所以 O 点到 l 距离的最小值为 2.

(21) 解:

(Ⅰ) $f'(x)=\frac{a\left(\frac{x+1}{x}-\ln x\right)}{(x+1)^2}-\frac{b}{x^2}$.

由于直线 $x+2y-3=0$ 的斜率为 $-\frac{1}{2}$，且过点 $(1,1)$，故 $\begin{cases}f(1)=1,\\ f'(1)=-\frac{1}{2},\end{cases}$ 即

$$\begin{cases}b=1,\\ \frac{a}{2}-b=-\frac{1}{2}.\end{cases}$$

解得 $a=1$，$b=1$.

(Ⅱ) 由 (Ⅰ) 知 $f(x)=\frac{\ln x}{x+1}+\frac{1}{x}$，所以

$$f(x)-\left(\frac{\ln x}{x-1}+\frac{k}{x}\right)=\frac{1}{1-x^2}\left(2\ln x+\frac{(k-1)(x^2-1)}{x}\right).$$

考虑函数 $h(x)=2\ln x+\frac{(k-1)(x^2-1)}{x}$ $(x>0)$，则

$$h'(x)=\frac{(k-1)(x^2+1)+2x}{x^2}.$$

(i) 设 $k\leqslant 0$. 由 $h'(x)=\frac{k(x^2+1)-(x-1)^2}{x^2}$ 知，当 $x\neq 1$ 时，$h'(x)<0$. 而 $h(1)=0$，故

当 $x\in(0,1)$ 时，$h(x)>0$，可得 $\frac{1}{1-x^2}h(x)>0$；

高考资源网 www.ks5u.com

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h(x)<0$，可得 $\frac{1}{1-x^2}h(x)>0$.

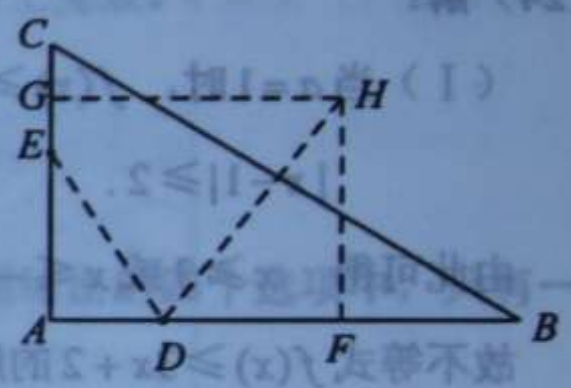
从而当 $x>0$，且 $x\neq1$ 时，$f(x)-(\frac{\ln x}{x-1}+\frac{k}{x})>0$，即 $f(x)>\frac{\ln x}{x-1}+\frac{k}{x}$.

（ii）设 $0<k<1$. 由于当 $x\in(1,\frac{1}{1-k})$ 时，$(k-1)(x^2+1)+2x>0$，故 $h'(x)>0$. 而 $h(1)=0$，故当 $x\in(1,\frac{1}{1-k})$ 时，$h(x)>0$，可得 $\frac{1}{1-x^2}h(x)<0$. 与题设矛盾.

（iii）设 $k\geqslant1$. 此时 $h'(x)>0$，而 $h(1)=0$，故当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h(x)>0$，可得 $\frac{1}{1-x^2}h(x)<0$. 与题设矛盾.

综合得，k 的取值范围为 $(-\infty,0]$.

（22）解：



（Ⅰ）连结 DE，根据题意在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle ACB$ 中，

$AD\times AB=mn=AE\times AC$，

即 $\frac{AD}{AC}=\frac{AE}{AB}$. 又 $\angle DAE=\angle CAB$，从而 $\triangle ADE\backsim\triangle ACB$.

因此 $\angle ADE=\angle ACB$.

所以 C，B，D，E 四点共圆.

（Ⅱ）$m=4$，$n=6$ 时，方程 $x^2-14x+mn=0$ 的两根为 $x_1=2,x_2=12$.

故 $AD=2$，$AB=12$.

取 CE 的中点 G，DB 的中点 F，分别过 G，F 作 AC，AB 的垂线，两垂线相交于 H 点，连结 DH. 因为 C，B，D，E 四点共圆，所以 C，B，D，E 四点所在圆的圆心为 H，半径为 DH.

由于 $\angle A=90°$，故 $GH/\!/AB$，$HF/\!/AC$. 从而 $HF=AG=5$，$DF=\frac{1}{2}(12-2)=5$.

故 C，B，D，E 四点所在圆的半径为 $5\sqrt{2}$.

（23）解：

（Ⅰ）设 $P(x,y)$，则由条件知 $M(\frac{x}{2},\frac{y}{2})$. 由于 M 点在 C_1 上，所以

$$\begin{cases}\frac{x}{2}=2\cos\alpha,\\ \frac{y}{2}=2+2\sin\alpha.\end{cases}\quad\text{即}\quad\begin{cases}x=4\cos\alpha,\\ y=4+4\sin\alpha.\end{cases}$$

高考资源网 www.ks5u.com

从而 C_2 的参数方程为

$$\begin{cases} x=4\cos\alpha, \\ y=4+4\sin\alpha. \end{cases} \quad (\alpha\text{为参数})$$

（Ⅱ）曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho=4\sin\theta$，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=8\sin\theta$.

射线 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 与 C_1 的交点 A 的极径为 $\rho_1=4\sin\dfrac{\pi}{3}$，

射线 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 与 C_2 的交点 B 的极径为 $\rho_2=8\sin\dfrac{\pi}{3}$.

所以 $|AB|=|\rho_2-\rho_1|=2\sqrt{3}$.

（24）解：

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，$f(x)\geqslant 3x+2$ 可化为

$$|x-1|\geqslant 2.$$

由此可得 $x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant -1$.

故不等式 $f(x)\geqslant 3x+2$ 的解集为

$$\{x\mid x\geqslant 3\text{或}x\leqslant -1\}.$$

（Ⅱ）由 $f(x)\leqslant 0$ 得

$$|x-a|+3x\leqslant 0.$$

此不等式化为不等式组

$$\begin{cases} x\geqslant a, \\ x-a+3x\leqslant 0, \end{cases} \text{或} \begin{cases} x\leqslant a, \\ a-x+3x\leqslant 0, \end{cases}$$

即 $$\begin{cases} x\geqslant a, \\ x\leqslant \dfrac{a}{4}, \end{cases} \text{或} \begin{cases} x\leqslant a, \\ x\leqslant -\dfrac{a}{2}. \end{cases}$$

因为 $a>0$，所以不等式组的解集为 $\{x\mid x\leqslant -\dfrac{a}{2}\}$.

由题设可得 $-\dfrac{a}{2}=-1$，故 $a=2$.

高考资源网 www.ks5u.com